

Векторлар, форалар және Метрика



Өзінің сандық мәнімен қоса кеңістіктегі бағытымен де сипатталатын шамалар векторлық шамалар немесе **векторлар** деп аталады.

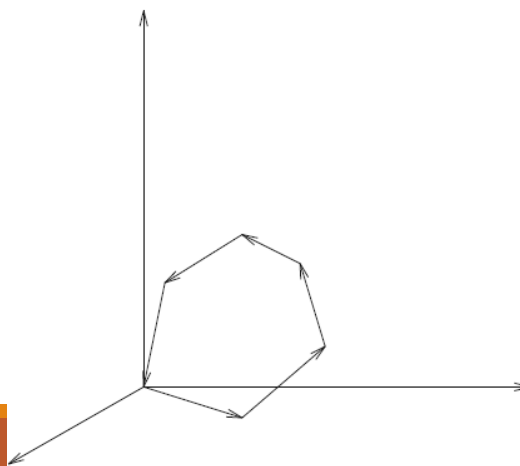
$a^\mu \vec{e}_\mu$ түріндегі өрнек $\vec{e}_\mu$ векторының **сызықтық комбинациясы**

ретінде белгілі. Мұндағы a^μ , $\mu = 1, 2, \dots, n$ нақты сандар.

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **векторлар сызықты тәуелсіз** деп аталады егер нақты сандарда

$a^\mu \neq 0$ болмаса, сонда-ақ $a^\mu \vec{e}_\mu = 0$ болмаса.

Геометриялық интерпретация: егер векторлардың тұйық көпбұрышын сызыу мүмкін болмаса (тіпті олардың ұзындығын реттеу арқылы) векторлар жиынтығы сызықтық тәуелсіз болады.



векторлар

$\vec{e}_\mu$ векторлары кеңістіктің **базис векторлары** деп аталады: $\vec{v} = -a^\mu \vec{e}_\mu$.

$\vec{v}$ векторының компоненттері v^μ сандар ретінде былай анықталады

$$v^\mu = -a^\mu \Rightarrow \vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu. \quad (2.1)$$

Егер ЖСТ шеңберінде вектор туралы сөз болса, онда кеңістік және уақыт компоненттері айтылады (ол төрт өлшемді вектор болады). Бұл жағдайда вектордың уақыт компоненті 0 индексімен белгіленеді, демек төрт өлшемді векторының компоненттері келесі түрде беріледі

$$V = (V^0, V^1, V^2, V^3) \quad (2.2)$$

Векторларды қосу мына түрде болады;

$$\vec{A} + \vec{B} = (A^0 + B^0, A^1 + B^1, A^2 + B^2, A^3 + B^3) \quad (2.3)$$

ал скалярлық көбейтуді мына түрде жазуға болады

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A^0, \alpha A^1, \alpha A^2, \alpha A^3) \quad (2.4)$$

Эйнштейннің қосу ережесі

Эйнштейннің қосу ережесі- қосындыларды қысқаша форматта жазу тәсілі. Бірдей индекс өрнекте екі рет қайталанған кезде, яғни, біреуі жоғарғы индекспен, енді біреуі төменгі индекспен қайталанса онда қосынды сол индекспен болатындығы көрсетіледі. Нақты мысал ретінде,

$$\sum_{i=1}^3 A_i B^i \rightarrow A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (2.5)$$

$$\sum_{a=0}^3 S^a T_{ab} \quad (2.6)$$

қосындылау жүргізілетін индекс *мылқау* (немой, *dummy*) индекс деп аталады егер ыңғайлы болса, оны басқа белгілеулермен ауыстыруға болады.

$$S^a T_{ab} = S^c T_{cb} \quad (2.7)$$

Алдыңғы өрнектердегі b индексі қосынды амалдарына қатыспайды. Мұндай индекс еркін индекс ретінде белгілі. Еркін индекс әдетте өрнектің екі жағында да пайда болады. Мысалы, келесі теңдеуді қарастырайық:

$$A^{a'} = \Lambda^{a'}_b A^b \quad (2.8)$$

Бұл өрнекте b мылқау индекс болып табылады. Бұл жерде b индексі бойынша қосынды дегенді білдіреді

$$A^{a'} = \Lambda^{a'}_b A^b = \Lambda^{a'}_0 A^0 + \Lambda^{a'}_1 A^1 + \Lambda^{a'}_2 A^2 + \Lambda^{a'}_3 A^3 \quad (2.9)$$

Осы өрнектегі басқа индекс - a' - еркін индекс. Егер еркін индексті өзгерткіміз келсе, оны теңдеудің екі жағында да өзгерту керек.

$$a' \rightarrow b',$$

$$A^{b'} = \Lambda^{b'}_b A^b \quad (2.10)$$

координаталық базис

Берілген координаттар жүйесінде e_a базис векторлар координаталық сызықтарға жанама болады. Осы себептен біз базис векторларды координаталық бағыттағы дербес туынды ретінде жаза аламыз. Басқаша айтқанда

$$e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (2.11)$$

Базистің бұл түрі *координаталық базис* деп аталады.

Бұл бізге векторды - функцияны оның туындысымен байланысты жаңа функцияға бейнелейтін оператор ретінде қарастыруға мүмкіндік береді.

Кейде дербес жағдайда:

$$Vf = (V^a e_a) = V^a \partial_a f \quad (2.12)$$

V векторын *ковариантты* V_a компоненттерімен жазуға болады. Вектордың бұл түрі *бір форма (one form)* деп аталады. *Бір форма базисі* индекстерді көтерді және оларды көбінесе ω^a деп белгілейді. Сонымен, біз мына түрде жаза аламыз

$$\tilde{V} = V_a \omega^a \quad (2.13)$$

бұл кәдімгі вектор емес, *бір форма* екенін ескерту үшін қолдандық (бірақ ол бірдей объект, басқа көріністе).

Метрикамен индекстерді көтеру және төмендету арқылы екі көрністің бір-біріне өтуге болады.

1-формалар меншікті векторлық кеңістік құрап және *базис 1-формалар* базис векторларды сендар негізінде бейнелеп двалды векторлық кеңістіктен жай векторларға айналады ,

Кronecker delta функциясы

$$\omega^a (e_b) = \delta_b^a \quad (2.14)$$

бұндағы $\delta_b^a = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.15)$

Координаталық бейнелеуде *1-формалар базисі* мына түрде беріледі

$$\omega^a = dx^a \quad (2.16)$$

Осы негізде (2.14) өрнегнің қалай пайда болғанын бірден білуге болады.

Кез-келген σ_a 1-формасы скаляр көбейтінді арқылы V_a векторын сандар түрінде бейнелейді

$$\sigma \cdot V = \sigma_a V^a$$

Басқаша айтқанда: 1-формалар - скаляр көбейу арқылы векторларды нақты сандар түрінде бейнелейді.

Жалпы алғанда, біз 1- форманы (р) және векторларды (q) нақты сандардың функциясы ретінде бейнелейтін $a(p, q)$ тензорын жаза аламыз.

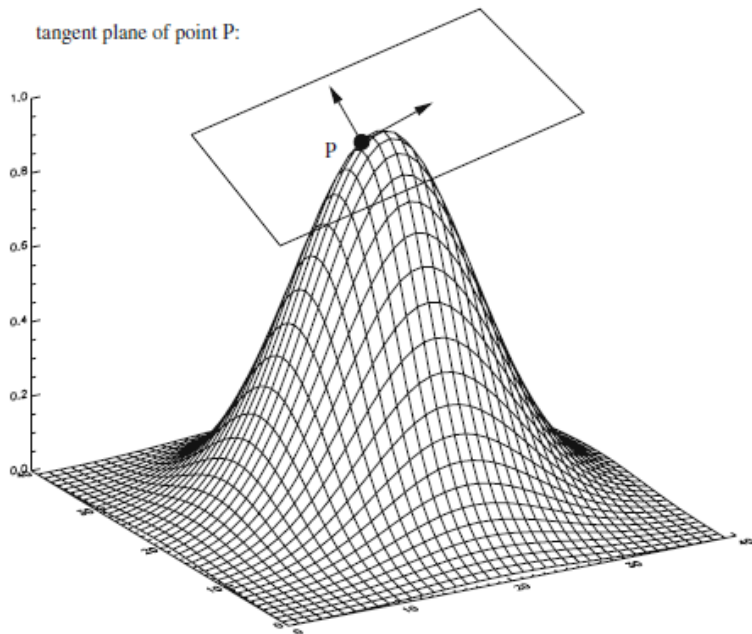
Біз жалпы тензорды келесі жолмен жаза аламыз:

$$T = T_{abc\dots}{}^{lmn\dots} \omega^a \otimes \omega^b \otimes \omega^c \dots e_l \otimes e_m \otimes e_n \dots$$

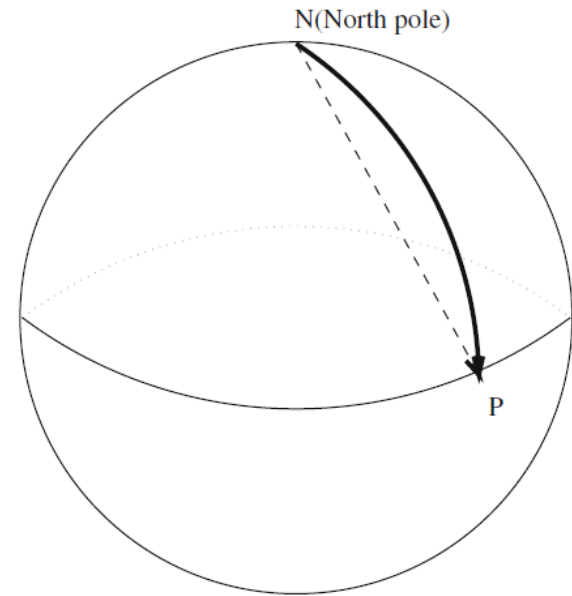
- Ковариантты тензор тек векторларды бейнелейді.
- коотовариантты тензор тек формаларды бейнелейді.
- Аралас тензор векторларды да, формаларды да R тезджр түрінде бейнелейді.

Қисық кеңістікте шектеулі ұзындықтағы векторлар болмайды.

Қисық кеңістіктегі әр түрлі нүктелердің жанама жазықтықтары әр түрлі болады. Шекті векторлар тек осы жанама жазықтықтарда ғана болады. Алайда **$d\mathbf{r}$** шексіз орналасу векторлары болады.



Қисық кеңістікте векторлар тек жанама жазықтықтарда болады.



Қисық кеңістікте векторлар тек жанама жазықтықтарда болады. Тангенс жазықтығындағы векторларда **$\mathbf{NP}$** векторы жоқ (үзік сызық)

Санақ жүйесі кеңістік-уақыттағы қиылыспайтын уақыт тәрізді әлемдік сызықтардың континуумі ретінде анықталады.

Санақ жүйесін санақ бөлшектерінің арнайы қозғалыстарының жиынтығы ретінде қарастыра аламыз. ***Инерциялық санақ жүйесі дегеніміз*** - айналмайтын еркін бөлшектердің жиынтығы ретінде қарастырылады.

Координаттар жүйесі - бұл кеңістіктегі оқиғалар үшін бірегей координаталар жиынын беретін 4 өлшемді континуум.

Санақ жүйесіндегі **байланыстағы координаталық жүйе** дегеніміз санақ жүйесіндегі бөлшектердің кеңістіктік координаталары тұрақты болатын координаттар жүйесін айтады.

Кеңістіктегі ортонормальды базис $\{\vec{e}_a\}$ былай анықталады

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = -1 (c = 1),$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij},$$

$\hat{i}, \hat{j}$ Кеңістік индекстері

координаталық базис векторының анықтамасы:

Кез-келген $\{x^\mu\}$ координаталар жүйесіде

$$\vec{e}_\mu \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu}$$

Векторлық өріс - компоненттері координаталардың үздіксіз және дифференциалданатын функциялары болып табылатын кеңістіктегі векторлар континуумы.

$\vec{r}(\lambda)$: қисығына жанама болатын $\vec{v}$ тангенс векторын қарастырайық

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}; \quad \text{бұндағы} \quad \vec{r} = \vec{r}[x^\mu(\lambda)]$$

Дифференциалдау ережесі бойынша

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \vec{e}_\mu = v^\mu \vec{e}_\mu$$

Осылайша, қисық бағытындағы жанама векторлық өрістің компоненттері λ шамасымен параметрленіп, мына түрде беріледі:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Салыстырмалылық теориясында инвариантты параметр көбінесе *меншікті уақыт* таңдалады. Материалдық бөлшектің әлемдік сызығына жанама вектор:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Мысалы: (Фотонның меншікті уақыты) Минковский кеңістігі:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 dt^2.$$

Фотон үшін $v = c$

$$\lim_{v \rightarrow c} ds^2 = 0.$$

Сонымен, фотонның әлемдік сызықтағы екі нүктенің арасындағы уақыт айырымы нөлге тең. Бұл сонымен қатар фотонның меншікті уақыты нөлге тең екенін білдіреді.

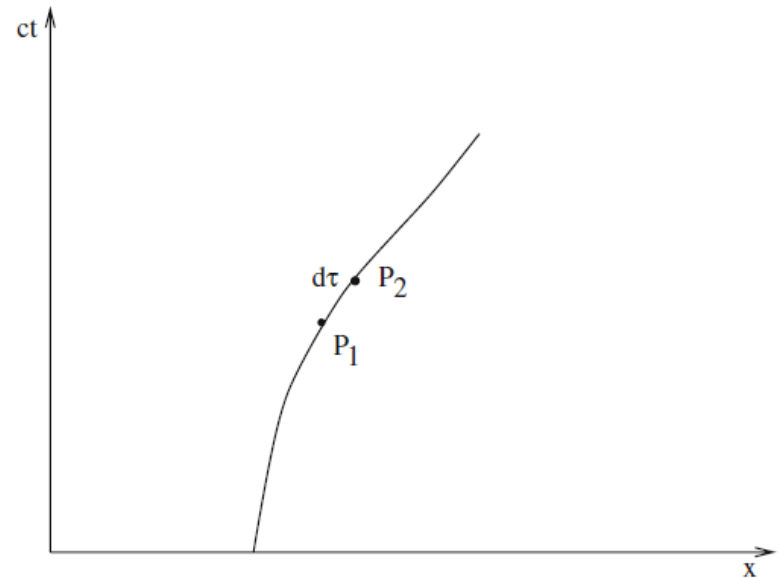
Кеңістік-уақыт интервалы, уақыт пен меншікті уақыт байланыстары

Уақыт тәрізді кеңістік-уақытқа арналған кеңістіктегі интервалдың физикалық интерпретациясы

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

мұндағы $d\tau$ - екі оқиғада болатындай етіп жүретін сағатта өлшенетін екі оқиғаның арасындағы уақыт аралығы

$$\begin{aligned} -c^2 d\tau^2 &= -c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \\ \Rightarrow d\tau &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt . \end{aligned}$$



Лабораториялық жүйеде екі оқиғаның арасындағы уақыт аралығы қозғалатын сағатта өлшенгеннен уақыттан аз, өйткені қозғалатын сағат баяу жүреді

Координаталық түрлендірулер

Екі координаталар жүйесі берілсін $\{x^\mu\}$ $\{x^{\mu'}\}$ $\vec{e}_{\mu'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{\mu'}}$

Таңбаланған координаттар жүйесі таңбаланбаған (**primed**) координаттар арқылы функция түрінде жазуға болсын немесе керісінше жазуға болатындай түрлендірулер болсын.. Онда біз тізбекі дифференциалдау ережесін қолдана аламыз

$$\vec{e}_{\mu'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} = \vec{e}_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}.$$

Бұл базис векторлар үшін түрлендіру теңдеуі

Ереже: теңдеудің екі жағындағы мүшелерде еркін индекстер орындары бірдей болауы керек (жоғары немесе төмен), және барлық мүшелердегі индекстер бірдей болуы керек!

Осы ережені қолдана отырып, енді кері түрлендіруді табуға болады:

$$\vec{e}_\mu = \vec{e}_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \quad \vec{v} = v^{\mu'} \vec{e}_{\mu'} = v^\mu \vec{e}_\mu = v^{\mu'} \vec{e}_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$$

Сонымен, вектордың компоненттері үшін түрлендіру ережелері былай болады

$$v^\mu = v^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}; \quad v^{\mu'} = v^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$$

қисық бойымен бағытталған туынды λ параметрі бойынша төмендегідей болады

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ Шамасы қисықтың жанама векторының компоненттері. Координаталық қисық бойынша бағыттағыш туынды:

$$\lambda = x^\nu, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Таңбаланған координат жүйесінде:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Координаталық базис векторларды былай анықтаймыз

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Бұл анықтама шектеулі векторлардың болуына негізделген емес. Ол қисық кеңістіктерге де, жазық кеңістіктерге де қолданылады.

мысал: Координатты түрлендіру

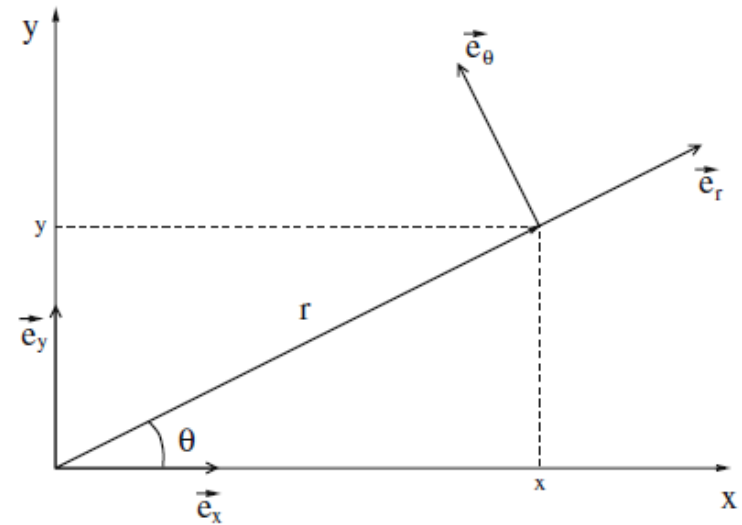
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Координаттық базис мынадай болады:

$$\vec{e}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Жоғарыдағы өрнекті пайдаланып координаттық базисті мына түрде ашып жазуға болады

$$\vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \vec{e}_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta};$$



$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y,$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y. \end{aligned}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$|\vec{e}_r| = 1$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

$$|\vec{e}_\theta| = r.$$

Бірлік вектор емес !

Алайда: $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow \vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$ орындалады.

Координаталық базис векторлар жалпы жағдайда бірлік векторлар болып табылмайды.

$$x = r \cos \theta \quad \text{and} \quad y = r \sin \theta$$

Декарттық координаталарды полярлық координаталармен бейнелейтін түрлендіру матрицасын табыңыз және полярлық координаталардың базистік векторларын декарттық координаталардың базистік векторлары тұрғысынан жазыңыз

$$e_{a'} = \Lambda^b_{a'} e_b \quad \text{Өрнегін пайдаланып}$$

Мына шаманы белгілеп алайық: $\Lambda^a_{b'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}$

$$\Lambda^x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\Lambda^y_r = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\Lambda^x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\Lambda^y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$e_r = \Lambda^x_r e_x + \Lambda^y_r e_y = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$$

$$e_\theta = \Lambda^x_\theta e_x + \Lambda^y_\theta e_y = -r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y$$

Вектордың компоненттері базистік векторға қарама-қарсы түрге айналады (сондықтан қарапайым векторды кейде контровариантты деп атайды; ол базистік векторларға қарсы өзгереді).

$$V^{a'} = \Lambda^{a'}_b V^b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} V^b$$

Ортонормальды базис дегеніміз - бір-біріне нормаль бірлік векторлардан тұратын векторлық базис. Ортонормальды базисті көрсету үшін индекстердің үстіне «шапка» (**hat**) қолданамыз $\{\vec{e}_{\hat{\mu}}\}$

Жазықтықтағы полярлық координаттармен байланысты ортонормальды базис

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \vec{e}_{\theta}$$

мысал: Релятивистік Доплер эффектісі

Лоренц түрлендіруі АСТ да белгілі және бір-біріне қарғанда салыстырмалы v жылдамдықпен қозғалатын екі жүйені байланытырады:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Векторлардың компоненттің түрлендіруге сәйкес, x -бағытта қозғалатын бөлшек үшін 4-импульс $P^{\mu} = (\frac{E}{c}, p, 0, 0)$ төмендегідей болады

$$p^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} p^{\mu},$$

$$E' = \gamma(E - vp). \quad \dots?$$

Фотонның энергиясы $E = h\nu$ және импульсі $p = h\nu/c$ болатындығын, мұндағы h - Планктың тұрақтысы, ал ν - фотонның жиілігі екенін пайдаланып, релятивистік Доплер эффектісіндегі жиіліктің ығысу теңдеуін аламыз:

$$\nu' = \gamma\left(\nu - \frac{v}{c}\nu\right) = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\nu}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}};$$

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Кеңістік-уақыттық метрикасы - бұл жалпы салыстырмалылықтағы кеңістік-уақыт қасиеттерін анықтайтын 4-тензор.

u және v екі векторының скалярлық көбейтіндісі $g(u, v)$ арқылы анықталады және әрбір векторлар жұбы сызықтық симметриялы $g(v, u)=g(u,v)$ болатын скаляр ретінде анықталады.

Скаляр көбейтіндінің $g(u,v)$ мәні базистік векторлардың әр жұбының скаляр көбейтіндісін базисте көрсету арқылы беріледі.

g - 2 дәрежелі симметриялы ковариант тензоры. Бұл тензор *метрикалық тензор* деп аталады. Тензордың компоненттері

$$g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v}) = g(u^\mu \vec{e}_\mu, v^\nu \vec{e}_\nu) = u^\mu v^\nu g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = u^\mu v^\nu g_{\mu\nu} .$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

Вектордың абсолюттік мәні: $|\vec{v}| = \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})} = \sqrt{|g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu|}$

мысал

декарттық координата

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0,$$

$$g_{xx} = g_{yy} = 1, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0,$$

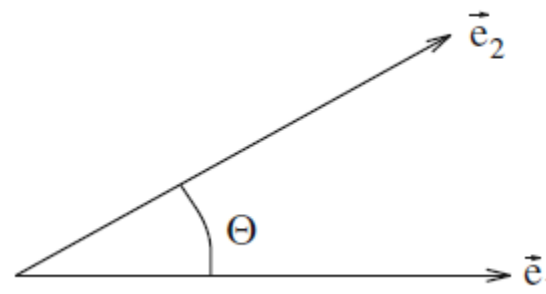
Метрикалық тензор $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

полярлық координата

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1, \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0.$$

Метрикалық тензор $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$

Диагональды емес векторлар



$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \theta = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1,$$

Метрикалық тензор $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$

Метрикалық тензордың контравариантты компоненттері былай анықталады

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \equiv \delta^\mu_\nu \quad g^{\mu\nu} = \vec{w}^\mu \cdot \vec{w}^\nu$$

бұндағы $\vec{w}^\mu \cdot \vec{w}_\nu \equiv \delta^\mu_\nu$.

$g_{\mu\nu}$ -дің кері матрицасы болып табылады

Метрикалық тензорды қолдана отырып, әр түрлі типтегі тензорлар арасындағы байланысты анықтауға болады (мысалы, контроварианттан ковариантқа түрлендіру).

Мысалы, *1-формада* векторды сипаттасақ:

$$v_\mu = g(\vec{v}, \vec{e}_\mu) = g(v^\alpha \vec{e}_\alpha, \vec{e}_\mu) = v^\alpha g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\mu) = v^\alpha g_{\alpha\mu}$$

Бұл индексті төмендету. Индекстерді көтеру мынадай болады

$$v^\mu = g^{\mu\alpha} v_\alpha.$$

аралас компонентті метрикалық тензор: $g^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$.

Қисық бойымен қашықтықты анықтайқ. Қисық λ (уақыт тәрізді қисықтар үшін меншікті уақыт τ) арқылы параметрленсін. $\vec{v}$ - қисықтың жанама векторлық өрісі болсын.

Қисық бойындағы нүктелер арасындағы интервал ds^2 квадрат ретінде анықталады

$$ds^2 \equiv g(\vec{v}, \vec{v}) d\lambda^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v}) = g(u^\mu \vec{e}_\mu, v^\nu \vec{e}_\nu) = u^\mu v^\nu g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = u^\mu v^\nu g_{\mu\nu}$$

Өрнегін ескеріп

Жазуға болады $ds^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu d\lambda^2$

Тангенсал вектр компоненттерін ескеріп $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Бұл өрнек **сызықтық элемент** деп аталады.

мысал

декарттық координата

$$g_{xx} = g_{yy} = 1, \quad g_{xy}^x = g_{yx}^y = 0, \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

полярлық координата

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \\ ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 .$$

Минковский кеңістігінде (жазық) декарттық координаттар

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Мысал: 4-өлшемді жылдамдық

$$\vec{U} = c \frac{dt}{d\tau} \vec{e}_t + \frac{dx}{d\tau} \vec{e}_x + \frac{dy}{d\tau} \vec{e}_y + \frac{dz}{d\tau} \vec{e}_z,$$

мұндағы t - санақ жүйесіндегі тыныштықтағы сағаттармен өлшенетін координаттар уақыты.

$$\vec{U} = U^\mu \vec{e}_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu, \quad x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x^0 \equiv ct,$$
$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma.$$

$$\vec{U} = \gamma(c, \vec{v}),$$

$\vec{v}$ бұл бөлшектің жалпы 3 өлшемді жылдамдығы.

4-өлшемді Импульс

$$\vec{P} = m_0 \vec{U}$$

m_0 бөлшектің тыныштық массасы

$$\text{4-өлшемді Импульс} \quad \vec{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right),$$

Бұндағы $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$, E Бөлшектің релятивистік энергиясы

$$\text{4-күш, немесе Минковский күші} \quad \vec{F} \equiv \frac{d\vec{P}}{d\tau}$$

$$\text{жалпы күш (3-өлшемді)} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

$$\text{Бұдан, 4-күш} \quad \vec{F} = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \vec{f} \right)$$

4-өлшемді үдеу

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau}$$

4 жылдамдық скаляр шема c мәніне ие болады

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -c^2$$

Жоғарыдағы өрнектерден шығатыны:

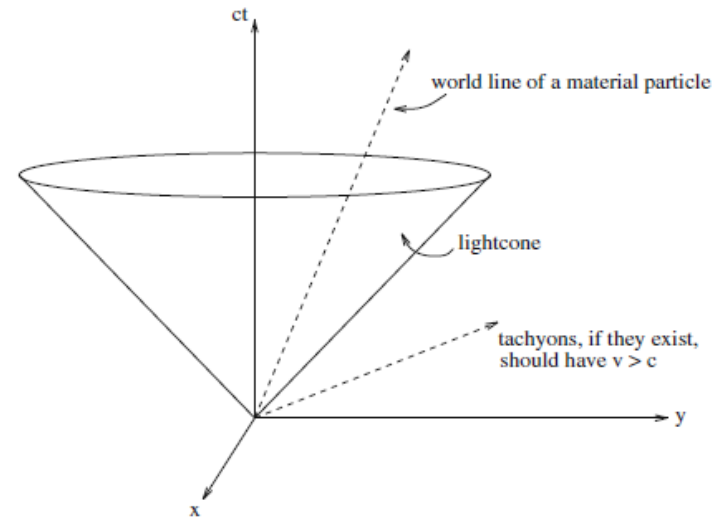
$$\vec{U} \cdot \vec{A} = 0,$$

бұдан шығатыны $\vec{A} \perp \vec{U}$...?

сондай-ақ $\vec{A}$ векторы кеңістік тәрізді деп аталады.

Декарттық координаттарда Минковский кеңістігінің (жазық кеңістіктің) сызықтық элементі төмендегідей болады:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$



Минковский диаграммасындағы
элемент сызықтары

Жалпы салыстырмалылық теориясында гравитация күш ретінде қарастырылмайды. Гравитация қисық кеңістіктегі қозғалыс ретінде сипатталады. Ньютондық гравитациялық теорияда еркін құлаудағы бөлшек тек гравитациялық күштің әсерінде болады. Жалпы салыстырмалылық теориясы бойынша, “еркін құлаған” жағдайда бөлшекке ешқандай күш әсер етпейді.

Мұндай бөлшектің 4-үдеуі болмайды. $\vec{A} \neq 0$ бөлшектің еркін құламағанын білдіреді. Содан кейін оған гравитациялық емес күштер әсер етеді. Бұдан шығатыны: үдеуді, яғни жалпы 3-үдеуді және абсолютті 4-үдеуді ажырата білу керек.

Мысал: Векторларды көбейту

Векторларды скаляр көбейту

$$V \cdot W = V_a W^a$$

Метрикалық тензордың көмегімен индексті көтеру және төмендетді қолданып
Скаляр көбейтуді орындай аламыз:

$$V \cdot W = V_a W^a = g_{ab} V^b W^a = g^{ab} V_a W_b$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$V^a = (1, 1)$$

$$W_a = (0, 1)$$

$$V_a, W^a$$

$$V \cdot W$$

?

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$V^a = (1, 1)$$

$$W_a = (0, 1)$$

$$V \cdot W$$

$$V_a, W^a$$

$$V_a = g_{ab} V^b$$

$$\Rightarrow V_r = g_{rr} V^r = (1)(1) = 1$$

$$V_\theta = g_{\theta\theta} V^\theta = (r^2)(1) = r^2$$

$$\Rightarrow V_a = (1, r^2)$$

$$W^a = g^{ab} W_b$$

$$\Rightarrow W^r = g^{rr} W_r = (1)(0) = 0$$

$$W^\theta = g^{\theta\theta} W_\theta = \left(\frac{1}{r^2}\right)(1) = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow W^a = \left(0, \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 V \cdot W &= g_{ab} V^a W^b = g_{rr} V^r W^r + g_{\theta\theta} V^\theta W^\theta \\
 &= (1)(0) + (r^2) \left(\frac{1}{r^2} \right) = 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

Алынған нәтижені тексеру үшін, векторларды компоненттері бойынша көбейтіндісін есептеуге болады

$$V \cdot W = V^a W_a = V^r W_r + V^\theta W_\theta = (1)(0) + (1)(1) = 0 + 1 = 1$$

Мысал:

Декарттық координаттардағы базистік векторлар ортонормальды болатындығын ескере отырып,

$$\partial_x \cdot \partial_x = \partial_y \cdot \partial_y = \partial_z \cdot \partial_z = 1$$

барлық басқа компоненттері жойылады, сфералық полярлық координаттардағы базистік векторлардың скаляр көбейтінділері метриканың компоненттерін беретіндігін көрсету керек.

Сфералық координаттардағы базистік векторлардың түрлендіру заңын қолданып, декарттық координаталар жүйесінде жазылады

$$e_{a'} = \Lambda^b_{a'} e_b$$

мұнда түрлендіру матрицасының элементтері былай берілген

$$\Lambda^b_{a'} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}}$$

Координаталар арасындакы байланыс белгілі:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial r}{\partial x} \partial_x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial_y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial_z \\ &= \sin \theta \cos \phi \partial_x + \sin \theta \sin \phi \partial_y + \cos \theta \partial_z \end{aligned}$$

Скаляр көбейтінді:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \partial_r \cdot \partial_r = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

$$\partial_\theta = r \cos \theta \cos \phi \partial_x + r \cos \theta \sin \phi \partial_y - r \sin \theta \partial_z$$

Скаляр көбейтінді:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \partial_\theta \cdot \partial_\theta \\ &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta] = r^2 \end{aligned}$$

$$\partial_\phi = -r \sin \theta \sin \phi \partial_x + r \sin \theta \cos \phi \partial_y$$

Скаляр көбейтінді:

$$g_{\phi\phi} = \partial_\phi \cdot \partial_\phi = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ = r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2 \sin^2 \theta$$

нөлдік векторы

Мына шартты қанағаттандыратын векторды нөлдік вектор дейміз:

$$g_{ab} V^a V^b = 0$$

Метриканың детерминанты жиі қолданылады. Біз оны былай жазамыз

$$g = \det(g_{ab})$$

Метрикадағы диагональ элементтерінің қосындысы **сингатурасы** деп аталады.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-1 + 1 + 1 + 1 = 2$$

ЖСТ –ның математикалық элементтері II.

Инварианттар.

X координаталар жүйесіндегі физикалық шама $\varphi = \varphi(x)$ функциясы арқылы сипатталсын. ал X координаттар жүйесінде бірдей физикалық шама $\phi = \phi(x')$ функциясымен сипатталады. Егер кеңістіктің кез-келген нүктесінде болса $\varphi(x) = \phi(x')$ онда мұндай шаманы координаталық түрлендірулерге қатысты инвариантты немесе скаляр немесе нөлдік ранкті тензор деп атайды. Басқаша айтқанда, инвариант деп кеңістіктің әр нүктесінде оның әртүрлі координаттар жүйелеріндегі мәні бірдей шаманы айтады

Тензорлардың теңдігі.

Егер берілген координаталар жүйесіндегі бір тензордың барлық компоненттері сол координаттар жүйесіндегі басқа тензордың сәйкес компоненттеріне тең болса, онда мұндай екі тензор тең деп аталады. Егер берілген нүктеде тензордың барлық компоненттері нөлге тең болса, онда тензор осы нүктеде нөлге тең болады.

Екінші рангті тензорлар.

$$\dot{A}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^k} A_{lm}, \quad \dot{A}^{ik} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial x^m} A^{lm}, \quad \dot{A}^i_{\cdot k} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^k} A^l_{\cdot m}$$

Екінші ранг тензорларға мысал ретінде векторлардың компоненттерінің көбейтіндісі болып табылатын тензорларды алуға болады:

$$\begin{aligned} A^{ik} &= A^i B^k, \\ A_{ik} &= A_i B_k, \\ A^i_k &= A^i B_k. \end{aligned}$$

Әрбір екінші рангті тензордың компоненттерін сәйкес векторлардың компоненттерінің көбейтіндісі түрінде болмайтынын ескеру керек.

$$A_{kr...}^{is...} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial x^p}{\partial x^r} \cdots A_{mp...}^{jl...},$$

$\mathcal{R}$ рангті аралас тензоры деп аталады. $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}^c$, мұндағы $\mathcal{R}_c$ (ковариант) Индекстер саны, $\mathcal{R}^c$ контровариант индекстер. $\mathcal{R}_c = 0$ болса, онда тензор контровариант болады, ал егер $\mathcal{R}^c = 0$ болса, ковариантты болады. X және X' координаталар жүйесі тең болғандықтан, таңбаланған және таңбаланбаған тензорлардың жоғарғы және төменгі индекстерін ауыстыруға болады. Атап айтқанда,

$$A_{kr...}^{is...} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial x^p}{\partial x^r} \cdots A_{mp...}^{jl...}.$$

Тензорларға амалдар қолдану

2 рангі тензорды әрқашан симметриялы және антисимметриялық бөлікке бөлуге болады. (Жоғары ретті рангі тензорларды осылайша бөлуге болмайтынын ескеріңіз).

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \\ &= A_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{4}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} + T_{\nu\mu}T^{\mu\nu} - T_{\nu\mu}T^{\nu\mu}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

жаңа тензорлар алу үшін тензорлармен жүргізуге болатын бірнеше негізгі алгебралық амалдарды қарастырайық.

Мысалы, жаңа тензор алу үшін бірдей типтегі екі тензорды қосуға болады:

$$R^{ab}{}_c = S^{ab}{}_c + T^{ab}{}_c$$

жаңа тензор алу үшін бірдей типтегі екі тензорды азайтуға болады:

$$Q^a{}_b = S^a{}_b - T^a{}_b$$

Жаңа тензор алу үшін тензорды скаляр a -ға көбейтуге болады

$$S_{ab} = aT_{ab}$$

Осы мысалдарда индекстердің орналасуы мен индекстердің саны ерікті екенін ескеріңіз. Негізгі шарт- осы типтегі операциялардағы тензорлардың барлығы **бірдей типте** болуы керек.

Тензордың симметриялы және антисимметриялық бөліктерін алу үшін қосу, азайту және скалярлық көбейтуді қолдана аламыз.

Тензор симметриялы, егер $V_{ab} = V_{ba}$ болса, $T_{ab} = -T_{ba}$ болса, антисимметриялы болады. Тензордың симметриялық бөлігі келесі арқылы беріледі

симметриялы
$$T_{(ab)} = \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba})$$

антисимметриялы
$$T_{[ab]} = \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba})$$

$$V_{(a} W_{b)} = \frac{1}{2} (V_a W_b + W_b V_a)$$

Әр түрлі типтегі тензорларды көбейтуге болады. Егер (m, n) тензорды (p, q) тензорға көбейтсек, нәтиже $(m + p, n + q)$ тензор болады. Мысалға

$$R^{ab} S^c_{de} = T^{abc}_{de}$$

(m, n) тензорды (m– 1, n– 1) тензорға айналдыруға болады. Бұл көтерілген және төмендетілген индексті теңдеу арқылы жасалады:

$$R_{ab} = R^c_{acb}$$

Кroneker дельтасымен тензорлық өрнектермен ықшамдауға болады: Тензордағы көтерілген индекс Kroneker дельтасындағы төмендетілген индекске сәйкес келгенде, оны Kroneker дельтасының көтерілген индексінің мәніне өзгереміз. Мысалы:

$$\delta^a_b T^{bc}_d = T^{ac}_d$$

Тензордағы төмендетілген индекс Kroneker дельтасындағы көтерілген индекске сәйкес келгенде, бұл индексті Kroneker дельтасындағы төмендетілген индексінің мәніне ауысады:

$$\delta^c_d T^{ab}_c = T^{ab}_d$$

Егер тензор симметриялы болса, онда ол базиске тәуелді болмайды.

Мысалы:

$$B_{ab} = B_{ba}$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_{ab} &= \Lambda^{c'}_a \Lambda^{d'}_b B_{c'd'} = \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^b} B_{c'd'} \\ B_{ba} &= \Lambda^{d'}_b \Lambda^{c'}_a B_{d'c'} = \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^a} B_{d'c'} = \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^b} B_{d'c'} \end{aligned} \right.$$

$B_{c'd'} = B_{d'c'}$

$$B^{cd} = g^{ca} B_a^{d} = g^{ca} g^{db} B_{ab} = g^{ca} g^{db} B_{ba} = g^{ca} B^d_{a} = B^{dc}$$

T_{ab} антисимметриялы болсын

$$S_{[a}T_{bc]} = \frac{1}{3} (S_a T_{bc} - S_b T_{ac} + S_c T_{ab})$$

Орындалатынын көрсету керек

$$T_{ab} = -T_{ba}$$

$$A_{[abc]} = \frac{1}{6} (A_{abc} + A_{bca} + A_{cab} - A_{bac} - A_{acb} - A_{cba})$$

$$S_{[a}T_{bc]} = \frac{1}{6} (S_a T_{bc} + S_b T_{ca} + S_c T_{ab} - S_b T_{ac} - S_a T_{cb} - S_c T_{ba})$$

$$S_{[a}T_{bc]} = \frac{1}{6} (S_a T_{bc} - S_b T_{ac} + S_c T_{ab} - S_b T_{ac} + S_a T_{bc} + S_c T_{ab})$$

$$= \frac{1}{6} (2S_a T_{bc} - 2S_b T_{ac} + 2S_c T_{ab})$$

$$= \frac{1}{3} (S_a T_{bc} - S_b T_{ac} + S_c T_{ab})$$

$Q_{ab} = Q_{ba}$ симметриялы тензор, ал $R_{ab} = -R_{ba}$ антисимметриялық тензор болсын.

$$Q^{ab} R_{ab} = 0 \quad \text{болатынын көрсету керек}$$

$$R^{ab} = -R^{ba}$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2} (R_{ab} + R_{ab}) = \frac{1}{2} (R_{ab} - R_{ba})$$

$$Q^{ab} R_{ab} = \frac{1}{2} Q^{ab} (R_{ab} - R_{ba}) = \frac{1}{2} (Q^{ab} R_{ab} - Q^{ab} R_{ba})$$

a, b индекстері екі мүшеде қайталанады. Бұл дегеніміз, олар *мылқау* индекстер, сондықтан біз оларды өзгерте аламыз. Екінші қосылғышта біз $a \leftrightarrow b$ жасаймыз, ол мына өрнекке алып келеді

$$= \frac{1}{2} (Q^{ab} R_{ab} - Q^{ab} R_{ab}) = \frac{1}{2} Q^{ab} (R_{ab} - R_{ab}) = 0$$

Егер $Q_{ab} = Q_{ba}$ симметриялы тензор, T_{ab} кез-келген тензор болса, онда

$$T_{ab} Q^{ab} = \frac{1}{2} Q^{ab} (T_{ab} + T_{ba}) \quad \text{екенін көрсетіңіз}$$

Q симметриялы тензор $\Rightarrow$

$$T_{ab} Q^{ab} = T_{ab} \frac{1}{2} (Q^{ab} + Q^{ba}) = T_{ab} \frac{1}{2} (Q^{ab} + Q^{ba})$$

оны T -ға көбейтісек

$$T_{ab} \frac{1}{2} (Q^{ab} + Q^{ba}) = \frac{1}{2} (T_{ab} Q^{ab} + T_{ab} Q^{ba})$$

Тағы да, a, b индекстері екі өрнекте де қайталанады. Сондықтан, олар өзгертуге болатын *мылқау* индекстер. Біз оларды екінші мүшеде b -ға ауыстырамыз, ол береді

$$\frac{1}{2} (T_{ab} Q^{ab} + T_{ab} Q^{ba}) = \frac{1}{2} (T_{ab} Q^{ab} + T_{ba} Q^{ab}) = \frac{1}{2} Q^{ab} (T_{ab} + T_{ba})$$

$$S_b^a = g^{ac} S_{cb}$$

$$T^{ab} = g^{ac} T_c^b = g^{ac} g^{bd} T_{cd}$$

$$R_{abcd} = g_{ae} R_{bcd}^e$$

Ковариантты туынды

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (A^b e_b) = \frac{\partial A^b}{\partial x^a} e_b + A^b \frac{\partial}{\partial x^a} (e_b)$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}} \quad \Lambda^{a}_{b'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{a}_{b'} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_r = \Lambda^b_r e_b = \Lambda^x_r e_x + \Lambda^y_r e_y + \Lambda^z_r e_z$$

$$= \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$$

$$e_\theta = \Lambda^b_\theta e_b = \Lambda^x_\theta e_x + \Lambda^y_\theta e_y + \Lambda^z_\theta e_z$$

$$= r \cos \theta \cos \phi e_x + r \cos \theta \sin \phi e_y - r \sin \theta e_z$$

$$e_\phi = \Lambda^b_\phi e_b = \Lambda^x_\phi e_x + \Lambda^y_\phi e_y + \Lambda^z_\phi e_z$$

$$= -r \sin \theta \sin \phi e_x + r \sin \theta \cos \phi e_y$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z) = 0$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z)$$

$$= \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$$

$$= \frac{1}{r} e_\theta$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z)$$

$$= -\sin \theta \sin \phi e_x + \sin \theta \cos \phi e_y$$

$$= \frac{1}{r} e_\phi$$

$$\frac{\partial e_a}{\partial x^b} = \Gamma^c_{ab} e_c$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} e_\theta \Rightarrow \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \phi} = \frac{1}{r} e_\phi \Rightarrow \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_\phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \sin \theta \sin \phi e_x + r \sin \theta \cos \phi e_y) \\ &= -r \cos \theta \sin \phi e_x + r \cos \theta \cos \phi e_y \\ &= \cos \theta (-r \sin \phi e_x + r \cos \phi e_y) \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-r \sin \theta \sin \phi e_x + r \sin \theta \cos \phi e_y) \\ &= \cot \theta e_\phi \end{aligned}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot \theta$$

Мұнда алынған коэффициент Кристоффель символдары немесе аффиндік байланыс деп аталады.

$$\frac{\partial A}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (A^b) e_b + A^b \frac{\partial}{\partial x^a} (e_b)$$

$$A^b \frac{\partial}{\partial x^a} (e_b) = A^b \Gamma^c_{ba} e_c$$

$$\frac{\partial A}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (A^b) e_b + \Gamma^c_{ba} A^b e_c$$

$$b \leftrightarrow c$$

$$\Gamma^c_{ba} A^b e_c \rightarrow \Gamma^b_{ca} A^c e_b,$$

$$\frac{\partial A}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (A^b) e_b + \Gamma^b_{ca} A^c e_b = \left(\frac{\partial A^b}{\partial x^a} + \Gamma^b_{ca} A^c \right) e_b$$

Ковариантты туынды

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (A^b e_b) = \frac{\partial A^b}{\partial x^a} e_b + A^b \frac{\partial}{\partial x^a} (e_b)$$

A covariant vector is transformed according to the formula

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

therefore

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

$$\nabla_b A^a:$$

$$\nabla_b A^a = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a_{cb} A^c$$

$$\nabla_c T^a_{b} = \partial_c T^a_{b} + \Gamma^a_{cd} T^d_{b} - \Gamma^d_{bc} T^a_{d}$$

$$\nabla_c T_{ab} = \partial_c T_{ab} - \Gamma^d_{ac} T_{db} - \Gamma^d_{cb} T_{ad}$$

$$\nabla_c T^{ab} = \partial_c T^{ab} + \Gamma^a_{cd} T^{db} + \Gamma^b_{dc} T^{ad}$$

$$\nabla_a V^a$$

$$\vec{V} = r^2 \cos \theta \, e_r - \sin \theta \, e_\theta.$$

$$\nabla_a V^a = \nabla_r V^r + \nabla_\theta V^\theta$$

$$\nabla_r V^r = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma^r_{cr} V^c = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma^r_{rr} V^r + \Gamma^r_{\theta r} V^\theta$$

$$\nabla_\theta V^\theta = \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \Gamma^\theta_{c\theta} V^c = \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \Gamma^\theta_{r\theta} V^r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} V^\theta$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$$

$$\nabla_r V^r = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma^r_{rr} V^r + \Gamma^r_{\theta r} V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial r}$$

$$\nabla_\theta V^\theta = \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \Gamma^\theta_{r\theta} V^r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} V^\theta = \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V^r$$

$$\nabla_a V^a = \nabla_r V^r + \nabla_\theta V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{1}{r} V^r + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta}$$

$$\vec{V} = r^2 \cos \theta \, e_r - \sin \theta \, e_\theta$$

$$\begin{aligned} \nabla_a V^a &= \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{1}{r} V^r + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} = 2r \cos \theta + r \cos \theta - \cos \theta = 3r \cos \theta - \cos \theta \\ &= \cos \theta (3r - 1) \end{aligned}$$

n өлшемдегі n^3 функциялар бірінші типтегі Christoffel символдары деп аталады Γ_{abc} .

бұл функцияларды метрикалық тензордан алуға болады

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right)$$

Мысалы: $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{bca}$

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right)$$

$$\Gamma_{bca} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} \right)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{abc} + \Gamma_{bca} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} \right) = \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} \end{aligned}$$

Біз екінші типтегі Кристоффель рәміздерін (әдетте оларды Кристоффель символдары деп атайды) индексті метрикалық тензорлар арқылы көтере аламыз.

$$\Gamma^a_{bc} = g^{ad} \Gamma_{dbc}$$

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right)$$

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Радиусы a ға тең 2-сфера үшін Christoffel символдарын табу керек.

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (a^2 \sin^2 \theta) = 2a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$a = d = \theta \quad \Gamma^{\theta}_{bc} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{b\theta}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{c\theta}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial \theta} \right)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} \right) (2a^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta$$

$$a = d = \phi$$

$$\Gamma^{\phi}_{bc} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{b\phi}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{c\phi}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial \phi} \right)$$

$$\Gamma^{\phi}_{bc} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{c\phi}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial \phi} \right)$$

$$\begin{aligned} b = \theta, \quad c = \phi, \quad \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial g_{\theta\phi}} - \frac{\partial \theta}{\partial g_{\phi\phi}} \right) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \right) (2a^2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

Кристоффель символдарының барлықтары нөлге тең.